Investigaciones Fenomenológicas, n. 13, 2016, 31-49.
e-ISSN: 1885-1088

MULTITUDES, COLECCIONES E INFINITO: LA EMERGENCIA DEL ENFOQUE CONJUNTISTA EN LA OBRA DE BERNHARD BOLZANO

MULTITUDES, COLLECTIONS AND INFINITE: THE EMERGENCE OF SET THEORY IN BERNHARD BOLZANO

Luis Alberto Canela Morales
UNAM (México)
luiscanela25@gmail.com

Resumen: El artículo tiene por objetivo analizar ciertos pasajes fundamentales de la *Wissenschaftslehre* y de las *Paradoxien des Unendlichen* de Bernard Bolzano en cuanto al análisis conjuntista se refiere. En dichos pasajes, Bolzano desarrolla conceptos fundamentales tales como multitud, colección e infinito que anticipan el carácter conjuntista y del análisis matemático moderno. Asimismo, se presentará un breve estudio de las *Contribuciones a una más fundada exposición de la matemática* y el apéndice, *Sobre la teoría kantiana de la construcción de conceptos a través de intuiciones*, textos donde Bolzano muestra su rechazo por Kant.

Palabras clave: Bolzano, Kant, multitud, colección, infinito

Abstract: The article addresses the treatment of certain fundamental passages from Bolzano's *Wissenschaftslehre* and *Paradoxien des Unendlichen*. In these passages, Bolzano describes some of his key concepts such "Multitude", "Collections" and "Infinite" in the context of mathematical analysis and Set theory. Therefore, I discuss at length the (almost) unknown *Contributions to a Better-Grounded Presentation of Mathematics* and the appendix *On the Kantian Theory of the Construction of Concepts through Intuitions*, texts where Bolzano shows his rejection of Kant.

Keywords: Bolzano, Kant, multitude, collections and infinite.

INTRODUCCIÓN

Para entender el desarrollo moderno de la teoría de conjuntos es necesario conocer su *devenir histórico-matemático* y su *devenir histórico-filosófico.* Esta última distinción hecha por Penelope Maddy en su texto *Naturalism in Mathematics*,[1] enfatiza, además, dos confluencias históricas diferentes pero no opues-

[1] Maddy, Penelope (1997), *Naturalism in Mathematics*, Oxford University Press, p. 3.

Fecha de recepción: 05-VII-2016 *Fecha de aceptación: 29-XI-2016*

tas: por un lado, los trabajos de Cantor y, por el otro lado, los trabajos de Frege, diferentes entre sí porque el primero tiene motivos matemáticos y el segundo motivos parcialmente filosóficos. Ambos momentos son coadyuvantes en la construcción de dicha tradición matemático-filosófica cuyo origen puede rastrearse y situarse en la obra de Bernhard Bolzano. Para justificar esta idea, dividiré mi artículo en tres parágrafos: en el primero desarrollaré la crítica de Bolzano al concepto de intuición pura kantiana; en el segundo me centraré en el análisis de algunos pasajes de la *Doctrina de la ciencia* y de las *Paradojas del infinito* donde Bolzano habla sobre los conceptos de multitud, conjunto y sumas, y en el último parágrafo desarrollaré algunas de sus tesis sobre las magnitudes infinitas en las *Paradojas del infinito*.

Pero antes de desarrollar cada parágrafo, es preciso reseñar la emergencia de la situación matemática conjuntista apoyados en una breve cita:

> Retrospectivamente, y desde el punto de vista de la emergencia del enfoque conjuntista de las diversas ramas de la matemática, el quinquenio 1868-1872 se antoja una etapa de hiperactividad. Las principales contribuciones que hay que reseñar son obra de matemáticos alemanes, lo que probablemente se debe al peculiar ambiente intelectual que se vivía en aquella zona, sobre todo a la orientación generalizada hacia una matemática pura. Y entre esos matemáticos destacan, por la impronta que dejaron, tres: Riemann, Dedekind y Cantor.[2]

Sin embargo, al triunvirato conjuntista (Riemann, Dedekind y Cantor) le antecede la obra de Bernhard Bolzano a quien, además, se le reconoce como uno de los iniciadores de la tradición semántica[3] y del moderno rigor argumentativo en las matemáticas. Esto último, resultado de la búsqueda de legitimización del proceder matemático a través de definiciones y demostraciones analíticas que dejan atrás los recursos ajenos al proceder científico. Este proceder se conocería más tarde como *aritmetización* del análisis.

Con Bolzano asistimos a uno de los primeros intentos por comprender la naturaleza y el papel del concepto de "conjunto" en relación con los conceptos de infinito actual e infinito potencial, magnitud y número, tanto dentro como

[2] Ferreirós, José (1998), "El enfoque conjuntista en matemática" en *La Gaceta de la RSME*, vol. 1, No. 3, p. 2

[3] Coffa, Alberto (2005), *La tradición semántica. De Kant a Carnap. La tradición semántica*, Vol. I, Universidad Autónoma Metropolitana, p. 48

fuera del análisis matemático. Dentro de esta línea de investigación destacan Paul Rusnock,[4] Jan Sebestik[5] y Peter Simons[6] quienes han sido pioneros en el intento por mostrar los puntos en común (y opuestos) que unen (y separan) la obra matemática de Bolzano con la obra de Cantor y Twardowski.[7] Asimismo, y dada sus numerosas obras (120 volúmenes), en la filosofía de Bolzano es posible encontrar líneas que trazan ciertas influencias en las tradiciones analíticas[8] y con la tradición lógica polaca (Leśniewski y Tarski).[9] Pero sin duda y quizás más notable, fue la influencia que ejerció Bolzano en el fundador de la fenomenología, Edmund Husserl, quien describe cómo se introdujo en la obra de este pensador: "Me enteré de Bolzano como matemático (mientras era estudiante de Weierstrass) a través de un tratado de Stolz en los *Mathematischen Annalen*, a través de G. Cantor, y sobre todo, a través de la discusión de Brentano (en sus conferencias) de las *Paradojas del infinito.*"[10]

Y es que, efectivamente, la obra de Bolzano habría de influir notablemente en el discurso filosófico-matemático del joven Husserl[11] quien entre 1884 y 1886 siguiera las lecciones sobre lógica elemental que impartía Brentano, quien, a su vez, manifestaba de modo singular y enérgico la importancia de "[…] la descripción psicológica del continuo con especial atención a las *Paradojas del infinito* de Bolzano."[12] En el mismo tenor, Husserl se refirió a Bolzano en varias ocasiones como uno de los filósofos de primera línea, al grado de señalar que "[…] la lógica como ciencia ha de edificarse sobre la obra de Bolzano".[13]

[4] Rusnock, Paul y Rolf George (2004), "Bolzano as Logician" en Dov M. Gabbay y John Woods (Eds.), *Handbook of the History of Logic: The Rise of Modern Logic: From Leibniz to Frege*, vol. 3, Elsevier B. V., Netherlands.
[5] Sebestik, J. (1992), *Logique et mathématique chez Bernard Bolzano*, París, Vrin, y (2003), "Husserl Reader of Bolzano" en Denis Fisette, D. (Ed.), *Husserl's Logical Investigations Reconsidered*, Dordrecht (Holanda/Boston/Londres): Kluwer Akademic Publishers
[6] Simons, P. (1992), *Philosophy and Logic in Central Europe from Bolzano to Tarski*, Dordrecht, Kluwer.
[7] *Cfr*. Benoist, Jocelyn (1997), *Phénoménologie, sémantique, ontologie. Husserl et la tradition logique autrichienne*, (Épiméthée), París: PUF, y (2001), *Représentations sans objet. Aux origines de la phénoménologie et de la philosophie analytique*, PUF, París: PUF.
[8] *Cfr*. Dummett, M. (1996*), Frege and Other Philosophers*, Oxford: Clarendon Press. Según Dummett, el crédito es de Gilbert Ryle, pues fue él quien introdujo la obra de Bolzano a la filosofía anglosajona.
[9] *Cfr*. (Simons, 1992: 14-15).
[10] Husserl, Edmund (2002), *Logische Untersuchungen. Ergänzungsband. Erster Teil. Entwürfe zur Umarbeitung der VI. Untersuchung und zur Vorrede für die Neuafulageder Logischen Untersuchungen*, Kluwer Akademic Publishers, Holanda/Boston/Londres, pp. 297-298.
[11] Pero no sólo Bolzano, pues al parecer el horizonte de la filosofía austriaca habría de ser determinante en la obra temprana de Husserl, prueba de esto lo da el espléndido texto de Jocelyn Benoist (1997).
[12] Husserl, E. (1987), *Aufsätze und Vorträge (1911-1921)*, Holanda/ Boston/ Londres: Kluwer Akademic Publishers, , p. 307.
[13] E. Husserl (1999), *Investigaciones lógicas*, Alianza, Madrid, p. 190.

1. EL RECHAZO DEL CONCEPTO DE INTUICIÓN PURA: BOLZANO, CRÍTICO DE KANT

Entre las contadas referencias bibliográficas hechas a propósito de las *Contribuciones a una más fundada exposición de la matemática* (1810) de Bolzano, se puede transcribir una que Husserl enunció en su *Lógica formal y trascendental* donde señala que en aquel ensayo, "[Bolzano] ya había presentado un intento de definición fundamental de la matemática: tiende a la idea de una teoría formal *a priori* de los objetos, aunque sin penetrar, por cierto, en su verdadero sentido […]".[14] Juicio negativo que deja de lado el aspecto más fundamental de dicha obra: la idea que señala que las construcciones matemáticas, entre ellas el concepto de infinito, no precisan del uso de ninguna intuición pura, sino sólo de "conceptos". Efectivamente, esto último se demuestra en el §5 de las *Contribuciones*, donde Bolzano distingue entre conocimiento matemático y conocimiento filosófico, distintos porque el primero hace uso de intuiciones puras y el segundo de conceptos discursivos:

> La filosofía crítica […] piensa que ha descubierto una diferencia característica y definitiva entre las dos clases principales de todo conocimiento humano *a priori*, la filosofía y las matemáticas. Esto es, que el conocimiento matemático es capaz de presentar de manera adecuada, es decir, construir, todos sus conceptos en una intuición pura [*reine Anschauung*], y por ello también es capaz de demostrar sus teoremas. Por otro lado, el conocimiento filosófico, desprovisto de toda intuición, debe conformarse con conceptos puramente discursivos.[15]

El desacuerdo es con la *filosofía crítica* cuyo mayor exponente es Kant. Dicho reparo es precisamente con el concepto de intuición pura como fuente de justificación epistémica del edificio de las matemáticas. Los recursos filosóficos y matemáticos que presenta Bolzano diluyen las respuestas hasta entonces ofrecidas a los problemas relacionados con el quehacer y la naturaleza de la geometría y la matemática en general, muchas de ellas en contacto íntimo con el desarrollo "psicologista"[16] de la matemática. Definitivamente, un primer in-

[14] Edmund Husserl, (2009), *Lógica formal y lógica trascendental*. 2ª edición preparada por Antonio Zirión, México: UNAM, p. 135.
[15] Bolzano, *Contributions to a Better-Grounded Presentation of Mathematics* en Russ, Steve (2004), *The Mathematical Works of Bernard Bolzano*, Oxford University Press, p. 93.
[16] El término alemán *Vorstellung,* desde la época de Kant, denotaba cualquier estado mental o determinación del alma, lo que daba por resultado una profunda confusión entre la esfera de lo subjetivo y la

tento de este tipo, al menos así lo veía Bolzano, venía de la mano de los trabajos de Kant:

> Una de las fuentes más importantes de disensión entre ellos es la distinta concepción que uno y otro tienen del papel que debe desempeñar la lógica en las matemáticas, pues, mientras que para Kant éste es más bien secundario e incluso superfino, dada la importancia que para él tiene la construcción intuitiva, Bolzano le conferirá, en cambio, un papel destacado a tono con su total desconfianza en la intuición como fuente de justificación de las matemáticas.[17]

La desconfianza de Bolzano es producto de su agudeza en la comprensión del distingo fundamental entre intuición, pensamiento y concepto. Consideración que le impidió aceptar que la matemática es la ciencia de la construcción de conceptos por medio de una intuición pura. Es evidente, entonces, que el desacuerdo con la *filosofía crítica* kantiana gira en torno a la noción de intuición pura y a la supuesta necesidad por parte de las matemáticas y la geometría. Dicho requerimiento es negado por Bolzano, para quien la matemática es una ciencia conceptual, esto es, una ciencia que contiene sólo conceptos y en esa medida, aunque el espacio y el tiempo sean formas puras de la sensibilidad, niega que ellos puedan ocupar el lugar de los conceptos puros. Este señalamiento también sostiene que la aritmética y la geometría no requieren ni de la intuición pura del tiempo, ni de la intuición pura del espacio, respectivamente. En suma, las matemáticas no contienen ningún tipo de intuición. En el § 6 de sus *Contribuciones*, es claro al respecto:

> Por mi parte, me gustaría reconocer abiertamente que todavía no he podido convencerme de la verdad de muchas doctrinas de la filosofía crítica, y especialmente de la corrección de las afirmaciones kantianas acerca de la *intuición pura* y de la *construcción de los conceptos a través de ella*. Sigo creyendo que en el *concepto de intuición pura* (es decir*, a priori*) hay una contradicción interna. Mucho menos puedo convencerme a mí mismo que el concepto de *número* debe ser cons-

esfera de objetivo de las representaciones *Cfr*. Dieter Heinrich "On the Unity of Subjetivity" en Dieter Heinrich (Ed.) *The Unity of Reason. Essays on Kan's Philosophy*, Cambridge: Harvard University Press.

[17] Castrillo, Pilar (2004), "La teoría lógica de Bolzano: Una reacción ante el subjetivismo Kantiano" en *Éndoxa*, Series Filosóficas, No. 18, UNED, p. 420

> truido necesariamente en el *tiempo* y que, en consecuencia, la intuición del tiempo es parte fundamental de la aritmética.[18]

Tan importante es este planteamiento que Bolzano amplía esta tesis en el *Apéndice sobre la teoría kantiana de la construcción de conceptos a través de intuiciones*, el cual se inserta, una vez más y abiertamente, en una disputa con el filósofo de Königsberg, justo sobre las intuiciones puras. En dicho anejo, Bolzano muestra que la intuición pura (*a priori*) en Kant es sólo la reiteración de la conciencia de necesidad que muestra que algo debe ser así y no de otro modo, por lo que no es *necesario* apelar a ningún tipo de intuición pura sino sólo al concepto de necesidad y analiticidad para dar cuenta de cómo es que los objetos se dan como tales. En contrapunto con Kant: donde se hable de intuición es mejor hablar de conceptos puros y en vez de magnitudes, formas. Lo anterior da por resultado el rechazo de la doctrina de los conceptos en la intuición pura por su carácter incoherente e inconsistente. En todo caso, "el cometido que se propone Bolzano y el núcleo en torno al cual gira su proyecto no es otro, en efecto, que el de ofrecer una explicación del conocimiento matemático, para él *a priori* y necesario, en la que la intuición no desempeñe papel alguno".[19]

Ahora bien, si la visión kantiana de que las verdades matemáticas (analíticas) son insostenibles y si en esto se basa la noción de los juicios sintéticos *a priori* (junto con la doctrina de la intuición pura), resulta, entonces, que el programa kantiano de una geometría es falso. Y aunque es evidente, esto lo admite Bolzano, que su terminología es kantiana (intuición, concepto, analítico, sintético) el papel de las proposiciones sintéticas y analíticas es diferente. Para Bolzano, aunque la noción de lo analítico surge de la verdad de las matemáticas no es su único fundamento. Pongamos un ejemplo sencillo, para Bolzano es claro que la relación entre A y B puede ser sintética, pero para llegar a esta conclusión no hizo falta hacer uso de ninguna intuición pura, porque de hecho también pudiera estar fundada en juicios puramente "conceptuales" y no necesitar de nada más. Más aún, la duda que embarga a Bolzano es si también la teoría de la intuición kantiana se aplica a las proposiciones que están fuera de la geometría:

[18] *Op. cit.,* Russ (2004), p. 93.
[19] *Op. cit.,* Castrillo, p. 420.

> Las proposiciones de la *aritmética* en algún modo no requieren de la intuición del tiempo. Lo mostraremos analizando un ejemplo sencillo, *Kant* ofrece la proposición, 7 + 5 = 12, que en lugar de ella, para hacerla más fácil, tomaremos la proposición más corta, 7 + 2 = 9. La prueba de esta proposición no es difícil tan pronto como asumimos la proposición general, *a + (b + c) = (a + b) + c,* por ejemplo, que con una suma *aritmética* uno sólo observa el número de términos no su orden (sin duda un concepto más extendido en secuencia de tiempo). Esta proposición excluye el concepto de tiempo más que presuponerlo. Pero habiendo aceptado esto, la prueba de la proposición de arriba puede ser llevada fuera de lugar en el siguiente modo: los juicios 1 + 1 = 2, 7 + 1 = 8, 8 + 1 = 9 son meras definiciones y convenciones. Por lo tanto, 7 + 2 = 7 + *(*1 + 1*)*, *per def.)* = *(*7 + 1*)* + 1, *(per propos. praeced.)* = 8 + 1*(per def.)* = 9, (*per def.*).[20]

El "error" de Kant, según Bolzano, fue haber establecido dos modos de entender lo "analítico": por una parte como el "predicado" que no está contenido en el "sujeto", y por otro lado, como juicios aclaratorios, es decir, aquellos que ya no amplían nuestro conocimiento, más bien sólo aclaran lo que ya sabemos. Empero, en esto reside el problema —al menos tal como lo vislumbra Bolzano— pues ambas definiciones no coinciden, sino que se repelen. En ese mismo tenor, y en parágrafos subsiguientes, la distinción entre juicios empíricos y juicios analíticos será rechazada, pues las matemáticas no pueden fundarse en juicios particulares y singulares, antes bien debe considerarse que las matemáticas sólo se refieren a entidades generales. De igual manera, Bolzano no admitirá que los juicios empíricos sean el fundamento de las matemáticas y menos de la geometría,[21] oponiéndose con ello, y una vez más, al núcleo teórico de la filosofía kantiana, a saber, la idea de que la intuición pura deba fundamentar los juicios sintéticos *a priori* de la matemática en general.

En afinidad y como ejemplo de lo antes dicho se encuentra el texto: *Demostración puramente analítica del teorema que afirma que entre dos valores con ordenadas de signos opuestos se encuentra al menos una raíz de la ecuación* (1817),[22] que constituye uno de sus primeros trabajos sobre geometría y

[20] *Op. cit.,* Russ (2004), p. 135.
[21] *Ídem.* pp. 93 y ss.
[22] B. Bolzano, (1905), *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewahren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Leipzig: Verlag Wilhelm Engelmann.

teoría de series.[23] Este ensayo contiene una introducción de varias páginas que Bolzano elaboró como una prueba del teorema que tiempo después llevaría su nombre. Dicho teorema expresa que si una función real *f(x)* es definida y continua en un intervalo cerrado *[a,b]*, *[f(a) y f(b)]*, y toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un punto *c* entre *a y b* para el que *f(c)=0.*

Las aseveraciones de Bolzano sobre este teorema no se dirigen ni contra su posible corrección ni contra su clara obviedad. Sin embargo, si considera que sea posible realizar una digresión sobre la justificación de su demostración, pues ella no puede darse a partir de su consideración como un axioma de la matemática, ya que los conceptos que componen dicho teorema no permiten afirmar que pueda ser una de esas verdades simples "llamadas *axiomas* o *verdades fundamentales* (*Grundwahrheiten*)"; [24] no obstante, tampoco puede dársele un tratamiento en el que la intuición sea su fuente de justificación epistémica. Como matemático de su época, Bolzano busca eliminar todo tipo de referencia a la intuición dentro de las matemáticas apoyándose únicamente en condiciones conceptuales que favorezcan la independencia entre la ciencia y la imaginación.

En la búsqueda de una correcta justificación a la formulación anterior, Bolzano esclarece la importancia filosófica de la demostración de este teorema, la que confirma, según Bolzano, que las verdades tomadas prestadas de la geometría[25] no tienen una validez general pues su funcionalidad depende (exclusivamente) de propiedades puramente geométricas. Este defecto del análisis, también cometido por Gauss en 1799 "[…] al fundar una verdad puramente analítica sobre una consideración geométrica",[26] ponía a Bolzano sobre el camino seguro hacia el esclarecimiento de verdades geométricas llevando a un pedestal más alto la discusión con Kant, para quien las condiciones de posibilidad de la experiencia (espacio y tiempo) son los marcos necesarios para la fenomenalización de cualquier elemento geométrico poniendo a la intuición sobre la base del conocimiento geométrico. La conclusión de Kant es que la producción de verdades matemáticas depende de la construcción de la intuición espa-

[23] Sobre las implicaciones filosóficas de este teorema, *Cfr*. Marc Meléndez Schofiel, *La importancia filosófica del teorema de Bolzano.* Versión electrónica en: http://marcmmw.freeshell.org/esp/logica/la_importancia_filosofica_del_teorema_de_bolzano.html
[24] *Op. cit.*, Bolzano, 1905, p. 5
[25] Ibíd, p. 5-6.
[26] Ibíd, p.3-4.

cial. Esto último, Bolzano lo rechazará argumentando que: "[…] con la misma claridad se trata de una violación inaceptable del *buen método* el intentar derivar verdades pertenecientes a la matemática *pura* (o general) (es decir, la aritmética, el álgebra o el análisis) a partir de consideraciones que sólo pertenecen a una parte *aplicada* (o especial) de la llamada *geometría*".[27] En buena medida, la demostración de 1817 ejemplifica, vía el ejemplo de una derivación, lo que años antes Bolzano había denunciado, a saber, que no es posible una construcción geométrica a través de la "construcción por medio de la intuición", sin que en ello se pierda su carácter analítico.

2. COLECCIONES, MULTITUDES Y SUMAS

Como resultado de las críticas al programa kantiano, Bolzano estaba convencido de las confusiones que producía en el campo de la matemática y de la filosofía, el concepto de intuición pura. Uno de esos errores, al permanecer la intuición pura en el plano de lo finito, era la limitación de la noción de infinito a infinitos reales imposibilitando la aparición de las totalidades infinitas *ideales*. En este tenor, y en conexión con esto último, se encuentran los tratados de Bolzano, la *Doctrina de la ciencia* (1837) y las *Paradojas del infinito* (1831). Ambos tratados, en su conjunto, son textos sustanciosos en cuanto a la teoría de conjuntos y la mereología se refiere. En ellos, Bolzano se propone desarrollar una teoría de las colecciones y las multitudes infinitas que, contrapunteando las posturas de Euclides, Spinoza y Cauchy,[28] logre dar cuenta de la noción de infinito actual como un predicado *contable* con el que se puedan "contar magnitudes" y de este modo dejar de lado la noción de infinito potencial que estaba ligada a cuestiones metafísico-teológicas.

Los §§ 82-87 de la *Doctrina de la ciencia* y los §§ 3-10 de las *Paradojas del infinito* presentan las ideas principales de la teoría de las colecciones de Bolzano. Esta teoría de las colecciones funciona, a su vez, como una unidad (ontológica) para la fundamentación del edificio de las matemáticas, muy particularmente, sobre la teoría de números y conjuntos infinitos. Sobre este punto es necesario tener presente lo siguiente: si bien es cierto que la teoría de las co-

[27] Ibíd., p. 4-5.
[28] *Cfr*. Bolzano, Bernhard, (1851), *Paradoxien des Unendlichen*, F. Příhonský (Ed.), Leipzig: Reclam, § 12.

lecciones de Bolzano está plagada de una serie de imprecisiones, mayormente la del concepto de suma,[29] esto no significa que no pueda hacerse un estudio ordenado y explícito en el que se presenten sus principales aportes y atinos. En lo que sigue de este estudio, presentaré esos aportes y aciertos de la teoría de las colecciones de Bolzano sirviéndome de la relación que existe entre los conceptos de multitud (*Menge*),[30] colección (*Inbegriff*)[31] y suma (*Summe*), no sin antes establecer su significado y alcance.

Aunque existe la remota posibilidad de que estos tres conceptos multitud, colección y suma, sean vistos como sinónimos en las obras de Bolzano[32] —pues todos designan agrupaciones en las cuales el orden de los elementos, que podrían estar o no estar estructurados, puede ser o no arbitrario— existe el acuerdo de diferenciarlos para adquirir un mayor entendimiento del proceder matemático de Bolzano. Esta precisión, que me parece atinada en todo sentido, permite hacer un seguimiento puntual de las diferentes anotaciones y definiciones de los conceptos de multitud, colección y suma, a lo largo de la *Wissenschaftslehre* y de las *Paradoxien des Unendlichen*. Así, por ejemplo, en el §82 de su *Doctrina de la ciencia*, Bolzano define el concepto de colección como sigue:

> Uso esta palabra en el mismo sentido en que se usa en su función común, pues entiendo por una colección de ciertas cosas exactamente lo mismo que quien se expresa con las palabras: un vínculo (*Verbindung*) o asociación (*Vereinigung*) de cosas, una reunión (*Zusammensein*) de cosas en un todo (*Ganzes*) en el que ellas ocurren como partes (*Teile*). Por tanto, la mera idea de colección no nos permite

[29] Krickel, F. (1995), *Teil und Inbegriff: Bernard Bolzanos Mereologie*, St. Augustin: Academia, pp. 98-99.

[30] Entre los traductores angloparlantes de la obra de Bolzano, p.ej. Rusnock y Russ, existe un consenso en la traducción de *Menge* por *Multitude*. Dicha traducción es acertada en la medida en que hace justicia al término *Menge*, al menos como Bolzano lo entendía, *Cfr. Op. cit.,* Russ (2004: xxviii-xxix) y Rusnock, Paul (2013), "On Bolzano's Concept of a Sum" en *History and Philosophy of Logic*, Vol. 34:2. Otra posible traducción es la que sugiere Peter Simons, quien propone traducir *Menge* como "*Masses*" (masa, multitud), *cfr*. Simons, "Bolzano on collections" en *Grazer Philosophische Studien*, 53, pp. 87—108. En realidad, esta última sugerencia no entra en contradicción con el término *Multitude.* La traducción castellana que se ofrece en este artículo será traducir *Menge* por multitud. Mientras que *Mannigfaltigkeit* será traducido como multiplicidad o variedad, pues esta designa, en la terminología de Bolzano, a una *serie de colecciones* de miembros de un mismo o diferente tipo.

[31] El concepto de *Inbegriff* también ha sufrido cambios en su definición a lo largo de la historia. En la terminología matemática del siglo de Bolzano, *Inbegriff* representaba un área cerrada o una colección de objetos "encerrados" *en* cierto límite. Los traductores angloparlantes arriba mencionados, lo traducen como "colección", recogiendo el sentido que Bolzano le daba a este término.

[32] Tal es el caso de Jan Sebestik quien en la introducción a la edición en español de las *Paradojas del infinito*, señala lo siguiente: "Las multitudes son conjuntos de objetos que pertenecen a una cierta especie. Pero dado que para Bolzano una especie puede ser definida por una colección *arbitraria* de individuos, la diferencia entre los conjuntos y las multitudes es más retórica que real". (Bolzano, 1991:12). En completo desacuerdo con esta afirmación, en este estudio se mostrará el error que se produce cuando estos términos se manejan como sinónimos.

> determinar el orden y la secuencia en las cuales las cosas que están juntas pueden aparecer o si, efectivamente, están en tal orden […] me parece, entonces, que una colección no es otra cosa más que algo complejo (*das Zusammengesetztheit hat*).[33]

Una colección, según Bolzano, es un todo complejo —lo que significa que contiene al menos dos partes o elementos concretos o abstractos— que se define gracias a la relación que existe entre sus partes o elementos. Estas partes o elementos no *deben ocurrir* repetidamente en la misma colección. A partir de esta definición del concepto de multitud se pueden desarrollar dos modos en los que se expresa una "multitud": ya sea como la asociación o vínculo de cosas en un todo, es decir, de unas partes que son partes de un todo, o como la idea de que una colección *es algo complejo* (con o sin orden, con o sin secuencia). En ambos casos, y contrario a Cantor, no existen colecciones vacías.

Ahora bien, si aquella distinción es correcta, tendríamos, entonces, dos tipos de colecciones:[34] 1) las multitudes y sumas, y 2) las series (*Reihen*) y las series continuas (*Stetige Reihe*). Los §§84 y 85 de la *Doctrina de la ciencia*, dan prueba de lo anterior; en ellos Bolzano enfatiza y destaca el hecho de que una colección es un tipo de unión comprehensiva (*Zusammenfassung*) de por lo menos dos objetos cualesquiera (partes de la colección en un todo), ya sea que estos sean concretos o abstractos. El peso fuerte en estos tipos de colecciones recae sobre las partes de un todo. De hecho, a partir de la naturaleza de las partes (concreta o abstracta/natural o social) y sus "modos de combinación", se puede determinar si se trata de una multitud, de una suma o de una serie. Por ejemplo, una diferencia clara entre series y multitudes es que para las primeras el orden y la secuencia son necesarios, mientras que para las segundas, el orden y la secuencia son por completo irrelevantes. Es por esto que los usos que le otorga Bolzano al concepto de colección están en función de las distinciones que existen entre conjuntos, sumas y series, que a su vez se determinan en virtud de cuáles son sus partes, su orden y su secuencia. Siguiendo esta distinción bolzaniana, los grupos de colecciones quedan de la siguiente manera:

[33] Bolzano, Bernhard (1837), *Wissenschaftslehre*, Sulzbach: Seidel, 4 Vols, p. 393.
[34] Lapointe, S. (2011), *Bolzano's Theoretical Philosophy*, New York: Palgrave Macmillan, p. 117.

> Colecciones donde el modo de combinación es relevante: series (*Reihen*), ideas, proposiciones, inferencias deductivas, colecciones empíricas (por ejemplo, equipos de fútbol, los bosques, las órdenes religiosas), otras.
>
> Colecciones donde el modo de combinación es irrelevante: multitudes (*Mengen*), sumas (*Summen*), cantidades, listas, unidades (*Einheiten*), pluralidades (*Vielheiten*), totalidades (*Allheiten*), otros.[35]

Lo anterior, es decir, los diferentes modos en que se dan las combinaciones permiten definir las multitudes como aquellas colecciones "que conservan su identidad en todas las reorganizaciones de sus partes",[36] esto significa que una colección mantiene su identidad incluso bajo todos los reordenamientos de sus elementos (modos de combinación entre sus partes) ya que los colecciona en una misma clase unitaria (total). Las sumas, casos especiales de las multitudes, serán aquellas colecciones que cumplan los siguientes criterios: 1) que el modo de combinación entre sus partes sea irrelevante, 2) que las partes de las partes de un todo sean de la misma clase[37] y 3) que conserven su identidad aún bajo el reordenamientos de sus partes.

Asimismo, el § 84 de la *Doctrina de la ciencia* ofrece una larga explicación —a partir del ejemplo de "un montón de dinero"— de las característica que debe tener una suma. Su definición se resume del siguiente modo: "Me permito llamar sumas a aquellas colecciones en las que la forma de combinación no importa y en el que las partes de las partes pueden ser consideradas como partes de un todo".[38] Un parágrafo antes, el § 83 de ese mismo texto, Bolzano había enfatizado que: "[…] sólo de las colecciones de un tipo especial, las partes de una parte son partes de un todo […]".[39] Ahora bien ¿cómo entiende Bolzano la relación entre partes de una parte de un todo? Es posible que Bolzano tuviera en mente cierto proceso de transitividad: si *A* contiene a *x* como parte y *x* tiene como parte a *z*, entonces, *A* contiene también a *z* o dicho de otro modo $(A \in B) \wedge (B \in C) \rightarrow (A \in C)$,[40] lo que permitiría conservar su identidad aún bajo todos los reordenamientos de sus partes. Pero en sentido estricto, el concepto suma que

[35] Ibíd, p. 118.
[36] Rusnock, Paul (2013), "On Bolzano's Concept of a Sum" en *History and Philosophy of Logic*, Vol. 34:2, p. 157.
[37] *Op. cit.*, Lapointe, p. 118.
[38] *Op. cit.*, Bolzano (1837), p. 400.
[39] *Op. cit.*, Lapointe, p. 397.
[40] *Op. cit.*, Rusnock, p. 155-169.

Bolzano describe es más que un proceso transitivo, en realidad es una modalidad de las donaciones de una colección y sus partes, y en esa medida se trata de definir de qué tipo de partes se está hablando.

Al respecto, Simons sugiere que las partes originales de una colección, en tanto suma, sean nombradas como *componentes* reservando el término *parte* para un sentido más general siempre y cuando no afecte a los componentes de una suma.[41] Por ejemplo, Juan, Miguel y Martín son o forman parte de una colección de tres personas, en ese sentido son *componentes* (o partes genuinas) de esa colección de tres personas. El término parte se aplicaría, en este caso, a las partes de cada individuo, por ejemplo, la mano de Juan. En todo caso, se trata de entender la suma como una *cuasi-colección* que sea invariante respecto de cualquier descomposición de sus elementos[42] conservando su identidad bajo (al menos) tres tipos de transformaciones: 1) el reordenamiento de las partes, 2) la disolución de las partes próximas y 3) la agregación/fusión de algunas partes próximas.[43] Los ejemplos son variados, Bolzano proporciona algunos de ellos en el §84 de la *Doctrina de la ciencia*: el contenido de una idea como la suma de sus partes, las sumas aritméticas, números concretos (pares, tercios, etc.) y totalidades.

En el caso de las colecciones que involucran a las series y a las series continuas, Bolzano las define del siguiente modo:

> A una colección de cosas A, B, C, D, E, F,...L, M, N…. se le denomina serie cuando tiene la propiedad constitutiva de que, para cualquier componente M, puede demostrarse la existencia de un N tal que, de acuerdo con una ley válida para todos los componentes de la colección, o bien N puede determinarse por su relación con M, o bien M puede determinarse por su relación con N.
>
> [...] uno de estos miembros se llamará (sin querer con ello designar el concepto de una secuencia temporal o espacial real) el antecesor o predecesor: el otro será llamado el sucesor.[44]

En el estudio introductorio a la edición inglesa de la *Doctrina de la ciencia*, Jan Berg señala que una serie debe cumplir con al menos cuatro criterios: 1) M

[41] *Op. cit*., Simons (1997), pp. 87-108.
[42] Sebestik, J. (1992), *Logique et mathématique chez Bernard Bolzano*, París: Vrin. Pp. 321-322.
[43] *Op. cit*., Rusnok (2013), pp. 163-164.
[44] Bolzano, Bernhard (1851), *Paradoxien des Unendlichen*, F. Přihonsky (Ed.), Leipzig: Reclam, p. 5.

no contiene ninguna parte de *x*; 2) M no es invariante bajo cualquier permutación de sus partes; 3) para cada miembro de M hay un predecesor inmediato o sucesor en M, y 4) para todo *x* e *y* en M, hay un *z* en M entre *x* e *y*.[45]

3. LA NOCIÓN DE INFINITO

Los primeros parágrafos de las *Paradojas del infinito*, del cuatro al diez, son cruciales para entender las nociones de multitudes infinitas y series. En ellos, Bolzano intenta unificar el edificio de las matemáticas definiendo en un sólo concepto —el de colección— las nociones de número y magnitud. La tesis principal de Bolzano es defender la existencia en sí de los conjuntos infinitos y su su independencia de nuestros procedimientos de construcción intuitiva, aunque dicha existencia o realidad objetiva debe ser objeto de una demostración matemática.

En el § 3, por ejemplo, Bolzano ejemplifica el tipo de multitudes donde sus componentes o partes genuinas al estar conjuntadas por la partícula "y" *definen* el tipo de relación que existe entre ellas como partes y el todo como colección. Bolzano caracteriza a estas colecciones bajo el rótulo de: "Una colección de objetos bien definidos o bien, un todo cuyos componentes (*Teile*) se encuentran bien definidos."[46] En el § 4 nos recuerda la definición de la noción de multitud: "Se llama multitud (*Menge*) a una colección que depende de un concepto respecto al cual el orden de sus componentes es indiferente […]".[47] Entender la noción de multitud de este modo permite comprender la multiplicidad (o variedad) como una *serie de colecciones* de miembros de un mismo o diferente tipo. Hay que recordar lo dicho en líneas atrás: una colección de cosas es llamada serie si tiene la propiedad de poder demostrar la existencia de un único elemento N que pueda determinarse por su relación con M o bien M determinarse por su relación con N. El término M de la serie se llamará antecesor o predecesor y el otro será llamado el sucesor.[48]

A partir de esta construcción abstracta y poco clara de una serie en términos de un sucesor y un predecesor, Bolzano llamará multitudes infinitas a las

[45] Bernard Bolzano, *Theory of Science*, Dordrecht-Holland / Boston-USA: D. Reidel Publishing Company. Edición y estudio introductorio de Jan Berg. Traducción de Burnham Terrell, pp. 25 y 26.
[46] *Op. cit.* Bolzano (1851), p. 2.
[47] Ibíd*,* p. 4.
[48] Ibíd, p. 5.

series numéricas naturales y series continuas a las multitudes de los números racionales. El §9 da luz sobre este punto: "[…] llamaré infinita a una pluralidad (*Vielheit*) si toda multitud finita representa tan sólo una parte de ella",[49] y en el §10, Bolzano agrega una nueva conceptualización del infinito, ésta un poco más estricta: "[…] todo aquello de lo que puede declararse que es infinito lo es en razón de y en la medida en que se percibe un elemento constitutivo que pueda ser considerado como una pluralidad infinita".[50] Lo anterior significa, según Bolzano, que una parte finita que se presenta dentro de un todo infinito será nombrada como infinita sólo si aparece de tal modo que pueda ser considerada como parte esencial (parte genuina o componente) de ese todo infinito.

El resultado de esta investigación, es que para Bolzano no todas las multitudes son iguales y los criterios que determinan o establecen su "magnitud" sólo son posibles a través de la comparación entre las propias multitudes, es decir por las relaciones de orden e igualdad permiten la comparación entre multitudes. Así pues, un conjunto infinito es isomorfo o tiene la propiedad de ser reflexivo a sí mismo a través de un subconjunto propio si puede establecerse en él un procedimiento biyectivo. De hecho, todos los conjuntos infinitos tienen esta característica, mientras que los conjuntos finitos son no-reflexivos. De este modo, cada multitud de objetos representa o tiene cierta *extensión* en la que *caen* una serie de objetos. Dicho de otra forma, Bolzano asigna a toda multitud una magnitud —que a final de cuentas es una *amplitud ω* (*Weite*)—, equivalente a la extensión de ese concepto. Esto demuestra que la diferencia fundamental entre las multitudes finitas y las infinitas radica en que una multitud infinita M es equipotente a una sub-multitud distinta de M.

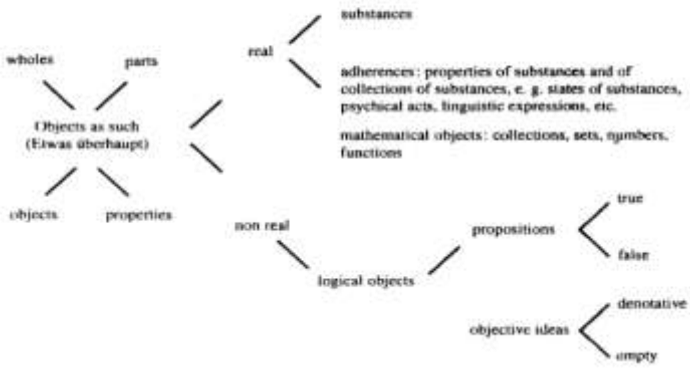
Ahora bien, la amplitud y alcance de esta definición es lo suficientemente extensa como para aplicarse a conceptos meramente matemáticos pero también, y así lo reitera Bolzano, a entidades reales. Siendo así las cosas, el infinito puede predicarse de cosas existentes porque todas ellas forman conjuntos infinitos, por ejemplo, las condiciones que experimenta cada ser humano *son infinitas*, los intervalos de tiempo entre dos sucesos pueden ser infinitos, puede hablarse también de un conjunto infinito en el espacio que ocupa una recta (puntos infinitos), etc.

[49] *Op. cit.*, (1851), p. 6.
[50] *Op. cit.*, (1851), p. 7.

Otro de esos conjuntos es el conjunto de las verdades en sí (*Wahrheiten an sich*) (o proposiciones objetivas o proposiciones en sí o proposiciones en el sentido objetivo)[51] construido sobre la base del conjunto de los números naturales. Sobre este punto cabe señalar que Bolzano haciendo frente a la impronta del psicologismo defendía la objetividad de las *proposiciones en sí* (*Sätze an sich*). Estas *proposiciones en sí* —que constituyen los objetos lógicos— son entidades que no dependen de ningún tipo de determinación ni óntica, ni ontológica, es decir, son independientes del ser de los entes (cósicos y no-cósicos, el ser y no-ser de algo, el existir y el pseudoexistir), lo que significa que no tienen determinaciones físicas o mentales, por lo que están más allá de las predicaciones de ser y no-ser. Lo anterior supone un avance considerable en la filosofía de las matemáticas de Bolzano, pues atiende a los objetos matemáticos como *ideas en sí* (*an sich*) manteniendo con ello una absoluta independencia de cualquier otra entidad que no sean ellas mismas. Con todo, las "verdades en sí" también forman parte de una suerte de sub-categoría:

> En tal sentido, las proposiciones (*Sätze*) son (en tanto «todos») formados por las representaciones (*Vorstellungen*) (en tanto «partes» de aquellos todos). Dentro del marco general de las proposiciones en sí, podemos distinguir entre «proposiciones verdaderas» (*wahre Sätze*) y «proposiciones falsas» (también consideradas en su «en sí»).[52]

En cualquier caso, se puede hacer un intento mereológico de explicación, tal como lo describe Sebestik en el siguiente diagrama:[53]



[51] *Cfr*. Carta del 22 de noviembre de 1834 que escribe Bolzano a Exner.
[52] Niel, Luis (2013), "Semántica y ontología. Reflexiones en torno a la *Wissenschaftslehre* de Bolzano" en *Pensamiento*, vol. 69, No. 261, p. 948.
[53] Jan Sebestik (2003), "Husserl Reader of Bolzano" en Denis Fisette, D. (Ed.*), Husserl's Logical Investigations Reconsidered*, Holanda/Boston/Londres Dordrecht: Kluwer Akademic Publishers, p. 77.

Lo interesante en esta caracterización es que todos los conjuntos infinitos, así como toda construcción infinita, son independientes de nuestro pensamiento, lo que no significa que no puedan ser mostrados intuitivamente. En otras palabras y siguiendo el ejemplo que proporciona Bolzano, se dice que: "hay una verdad" (está es una proposición que se sigue necesariamente de la negación de un escepticismo radical), entonces, "la verdad de que «hay una verdad»" es otra verdad lo cual deja abierta una iteración idéntica hasta el infinito. De esta manera, de 1, siempre tendremos cualquier número (*n*), y de cualquier número escogido arbitrariamente, tendremos siempre un *n+1*.

Pero cabe preguntar ¿de verdad Bolzano explica la noción de infinito a partir de esta argumentación? ¿No será más bien que ha "construido" un conjunto a partir de otro conjunto, lo que significa que utilizó proposiciones distintas para cada uno de ellos? Cuestiones sin duda relevantes y cuya posible respuesta es que Bolzano pierde el rumbo al intentar explicar la noción de infinito, pues sólo explica cómo derivar un conjunto infinito de otro conjunto infinito pero no lo qué "es" un infinito. No obstante, esto último no inválida el sorprendente resultado y quizás uno de los más importantes de la investigación de su tiempo, a saber, la correspondencia *biunívoca* y/o la relación de un conjunto con una de sus partes (subconjunto) propiedad exclusiva de los conjuntos infinitos.

En resumen, el análisis de Bolzano es sobresaliente, pues es una búsqueda de una "medida" del infinito y su expresión de modo "contable", es decir, en conceptos como unidades, decenas, centenas, etc., partiendo de la noción de "equipotencia" de una multitud en conjunción con los conceptos de series, conjuntos, número y magnitudes. El infinito sería, entonces, una unidad de medida. Asimismo, su interés por enfatizar la correspondencia (*biunívoca*) entre multitudes y sus partes (subconjuntos) lo llevó a postular la idea de un infinito actual y comparar el tamaño de los conjuntos infinitos y su posible jerarquía, quizás al modo de Cantor.

BIBLIOGRAFÍA

BEHBOUD, A. (1997), "Remarks on Bolzano's collections", *Grazer Philosophischen Studien* 53, pp. 109-115.

BENOIST, Jocelyn (1997), *Phénoménologie, sémantique, ontologie. Husserl et la tradition logique autrichienne*, París: PUF (Épiméthée).

— (2001), *Représentations sans objet. Aux origines de la phénoménologie et de la philosophie analytique*, París: PUF.

BERG, J. (1962), *Bolzano's Logic*, Stockholm: Almqvist & Wiksell.

BOLZANO, Bernard (1837), *Wissenschaftslehre*, 4 Vols., Sulzbach: Seidel.

— (1851), *Paradoxien des Unendlichen*, F. Příhonsky (Ed.), Leipzig: Reclam.

— (1905), *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewahren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Leipzig: Verlag Wilhelm Engelmann.

— (1973), *Theory of Science*, estudio introductorio de Jan Berg. Traducción de Burnham Terrell, Dordrecht-Holland / Boston-USA: D. Reidel Publishing Company Edición.

— (1991), *Paradojas del infinito*, México: Coordinación de servicios editoriales-UNAM. Trad. Luis Felipe Segura.

CASTRILLO, Pilar (2004), "La teoría lógica de Bolzano: Una reacción ante el subjetivismo kantiano", *Éndoxa, Series Filosóficas*, nº 18, UNED, pp. 417-443.

COFFA, Alberto (2005), *La tradición semántica. De Kant a Carnap. La tradición semántica*, Vol. I, México: Universidad Autónoma Metropolitana.

DUMMETT, M. (1996), *Frege and Other Philosophers*, Oxford: Clarendon Press.

FERREIRÓS, José (1998), "El enfoque conjuntista en matemática", *La Gaceta de la RSME*, vol. 1, núm. 3, pp. 1-18.

HEINRICH, Dieter (1994), "On the Unity of Subjetivity" en *The Unity of Reason. Essays on Kant's Philosophy*, Dieter Heinrich (Ed.), Cambridge, Massachussets: Harvard University Press. Trad. G. Zoeller.

HUSSERL, E. (1987), *Aufsätze und Vorträge* (1911-1921), Holanda/Boston/Londres: Kluwer Akademic Publishers. Hrsg. Thomas Nenon y Hans Rainer Sepp.

— *(1999), Investigaciones* lógicas, Madrid: Alianza. Trads. José Gaos y Manuel García Morente.

— (2002), *Logische Untersuchungen*. Ergänzungsband. Erster Teil. *Entwürfe zur Umarbeitung der VI. Untersuchung* und zur Vorrede für die Neuafulage- der Logischen Untersuchungen, Holanda/Boston/Londres: Kluwer Akademic Publishers. Hrsg. Ullrich Melle.

— (2009), *Lógica formal y lógica trascendental*. 2ª edición preparada por Antonio Zirión, UNAM, México. Trad. Luis Villoro.

KRICKEL, F. (1995), *Teil und Inbegriff: Bernard Bolzanos Mereologie*. St. Augustin: Academia.

LAPOINTE, S. (2011), *Bolzano's Theoretical Philosophy*, New York: Palgrave Macmillan.

— (2003), (Ed.), *Bernard Bolzano. Philosophie de la logique et théorie de la connaissance*, Vol. 30, No. 1, Printemps.

MADDY, Penelope (1997), *Naturalism in Mathematics*, Oxford University Press.

NIEL, Luis (2013), "Semántica y ontología. Reflexiones en torno a la Wissenschaftslehre de Bolzano", *Pensamiento*, vol. 69, núm. 261, pp. 939-962.

RUSS, Steve (2004), *The Mathematical Works of Bernard Bolzano*, Oxford: Oxford University Press.

RUSNOCK, Paul y Rolf GEORGE (2004), "Bolzano as Logician" en Dov M. Gabbay y John Woods (Eds.), *Handbook of the History of Logic: The Rise of Modern Logic: From Leibniz to Frege*, vol. 3, Netherland: Elsevier B. V.

Rusnock, Paul (2013), "On Bolzano's Concept of a Sum", *History and Philosophy of Logic*, Vol. 34:2. Pp. 155-169.

SEBESTIK, J. (1992), *Logique et mathématique chez Bernard Bolzano*, Paris: Vrin.

SEBESTIK, Jan (2003), "Husserl Reader of Bolzano" en Denis Fisette, D. (Ed.), *Husserl's Logical Investigations Reconsidered*, Holanda/Boston/Londres Dordrecht: Kluwer Akademic Publishers,.

SIMONS, P. (1992), *Philosophy and Logic in Central Europe from Bolzano to Tarski*, Dordrecht: Kluwer.

— (1997), "Bolzano on collections", *Grazer Philosophische Studien*, 53. Pp. 87-108.